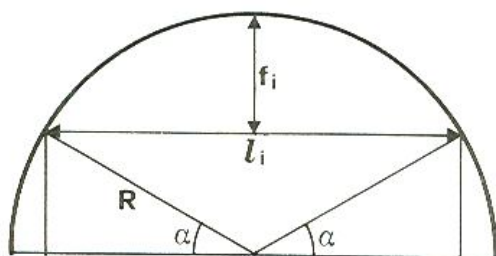


A körívboltív adatai közötti összefüggésekről

Bevezetés

Egy olasz szerkezettani könyvben – [1] – találhatók az alábbiak → 1. ábra.



Jelölések:

l_i : nyílásköz;

f_i : nyíl(ás)magasság;

R : körív sugara;

α : jellemző szög;

i : intrados indexe.

1. ábra

A könyvbéli feladat: adott l_i és f_i adatok mellett számítással meghatározandó R és α .
[1] megoldása:

$$\frac{1 - \sin \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{f_i}{l_i} \quad (*)$$

(*) -ből meghatározza α - t, majd ezzel

$$R = \frac{l_i}{2 \cos \alpha} \quad (**)$$

A mi feladataink:

1. (*) és (**) igazolása.
2. Az eredmények átalakítása, egyszerűbb alakra hozása.
3. Az eredmények más úton való levezetése.
4. A szerkesztéses megoldás megadása.

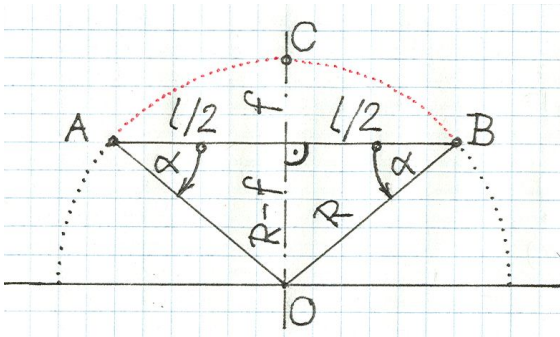
Megoldás

1. A (*) és (**) képletek igazolása:

Ehhez tekintsük a 2. ábrát is! A jelölt derékszögű háromszögből:

$$R - f = R \cdot \sin \alpha; \quad (1)$$

$$\frac{l}{2} = R \cdot \cos \alpha. \quad (2)$$



2. ábra

(1) -ből:

$$f = R \cdot (1 - \sin \alpha); \quad (3)$$

(2) -ből:

$$l = 2 \cdot R \cdot \cos \alpha. \quad (4)$$

Majd (3) és (4) - gyel:

$$\frac{f}{l} = \frac{1 - \sin \alpha}{2 \cdot \cos \alpha}. \quad (*)$$

Most (4) -ből:

$$R = \frac{l}{2 \cdot \cos \alpha}. \quad (**)$$

Ezzel a feladat 1. részét megoldottuk.

2. Az eredmények átalakítása, egyszerűbb alakra hozása

Először határozzuk meg α - t vagy valamely szögfüggvényét (*) -ből!

Rendezve, majd átalakításokat végezve:

$$2 \cdot \frac{f}{l} \cdot \cos \alpha = 1 - \sin \alpha; \quad (a)$$

$$\left(2 \cdot \frac{f}{l} \right)^2 \cdot \cos^2 \alpha = (1 - \sin \alpha)^2; \quad (b)$$

$$\left(2 \cdot \frac{f}{l} \right)^2 \cdot (1 - \sin^2 \alpha) = (1 - \sin \alpha)^2; \quad (c)$$

$$\left(2 \cdot \frac{f}{l} \right)^2 \cdot (1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha) = (1 - \sin \alpha) \cdot (1 - \sin \alpha); \quad (d)$$

$$\left(2 \cdot \frac{f}{l} \right)^2 \cdot (1 + \sin \alpha) = (1 - \sin \alpha); \quad (e)$$

$$\left(2 \cdot \frac{f}{l} \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{f}{l} \right)^2 \cdot \sin \alpha = 1 - \sin \alpha; \quad (f)$$

$$\sin \alpha \cdot \left[1 + \left(2 \cdot \frac{f}{l} \right)^2 \right] = 1 - \left(2 \cdot \frac{f}{l} \right)^2; \quad (g)$$

innen:

$$\sin \alpha = \frac{1 - \left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2}{1 + \left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2}. \quad (5)$$

(5) -ből:

$$\alpha = \arcsin \left[\frac{1 - \left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2}{1 + \left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2} \right]. \quad (6)$$

Másodszor határozzuk meg **R** kifejezését az adott mennyiségekkel!

(**) és (*) -ből:

$$R = \frac{l}{2 \cdot \cos \alpha} = \frac{f}{1 - \sin \alpha}; \quad (h)$$

most (5) -ből:

$$1 - \sin \alpha = 1 - \frac{1 - \left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2}{1 + \left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2} = \frac{1 + \left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2 - 1 + \left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2}{1 + \left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2} = 2 \cdot \frac{\left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2}{1 + \left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2}; \quad (i)$$

(h) és (i) -ből:

$$R = \frac{f}{1 - \sin \alpha} = \frac{f}{2 \cdot \frac{\left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2}{1 + \left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2}} = f \cdot \frac{1 + 4 \cdot \left(\frac{f}{l}\right)^2}{8 \cdot \left(\frac{f}{l}\right)^2} =$$

$$= \frac{l^2}{8 \cdot f} \cdot \left[1 + 4 \cdot \left(\frac{f}{l}\right)^2 \right] = \frac{l^2}{8 \cdot f} + \frac{f}{2},$$

tehát

$$\underline{\underline{R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8 \cdot f}}}. \quad (7)$$

Ezzel feladatunk 2. részét is megoldottuk.

3. Az eredmények más úton való levezetése

A 2. ábra alapján, Pitagorász tételével:

$$R^2 = (R - f)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2; \quad (k)$$

$$R^2 = R^2 - 2 \cdot R \cdot f + f^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2; \quad (l)$$

$$2 \cdot R \cdot f = f^2 + \frac{l^2}{4}; \quad (m)$$

innen:

$$\underline{\underline{R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8 \cdot f}}}, \quad (n)$$

(7) - tel egyezően.

Ismét a 2. ábrából:

$$\sin \alpha = \frac{R - f}{R}; \quad (o)$$

most (n) és (o) - val:

$$\sin \alpha = \frac{\frac{f}{2} + \frac{l^2}{8 \cdot f}}{\frac{f}{2} + \frac{l^2}{8 \cdot f}} = \frac{\frac{l^2}{8 \cdot f}}{\frac{l^2}{8 \cdot f}} \cdot \frac{1 - \frac{f}{2} \cdot \frac{8 \cdot f}{l^2}}{1 + \frac{f}{2} \cdot \frac{8 \cdot f}{l^2}} = \frac{1 - \left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2}{1 + \left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2},$$

tehát

$$\underline{\underline{\sin \alpha = \frac{1 - \left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2}{1 + \left(2 \cdot \frac{f}{l}\right)^2}}}, \quad (p)$$

egyezésben (5) - tel.

Ezzel feladatunk 3. részét is megoldottuk.

Látható, hogy a 3. pontbeli megoldás mennyivel egyszerűbb, kényelmesebb, mint az 1., ill. a 2. pontbeli.

4. A szerkesztéses megoldás megadása

a.) Szerkesztés a számított adatok alapján

Lépések:

- ~ felmérjük az l hosszúságú AB szakaszt;
 - ~ e szakasz végpontjaiból α hajlású félegyenéseket húzunk, melyek O metszéspontja lesz a körív középpontja;
 - ~ O - ból A - n és B - n keresztül meghúzzuk az ACB körívet.
- Egy másik lehetőség: az A és B végpontokból R sugarú körívek metszéspontjaként kapjuk O - t.

b.) Szerkesztés a bemenő adatok alapján

Lépések:

- ~ felmérjük az l hosszúságú AB szakaszt;
- ~ e szakasz felezőpontjából merőlegesen felmérjük f - et;
- ~ megszerkesztjük az AC szakasz felező merőlegesét;
- ~ megszerkesztjük az CB szakasz felező merőlegesét;
- ~ a szakaszfelező merőlegesek metszéspontja: O;
- ~ O - ból pl. $R = OA = OC = OB$ távolsággal körívet húzunk.

Ezzel a kitűzött feladatainkat megoldottuk.

Zárszó

Bár az [1] - ben talált képletek jók, ám nem igazán célszerűek. A fent levezetett jó és célszerű formulákat, elemi szerkesztéseket ajánljuk felhasználásra.

Irodalom:

[1] – C. Gavarini ~ G. C. Beolchini ~ G. Matteoli: Costruzioni
Volume secondo: Elementi di tecnica delle costruzioni
Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1988.

Összeállította: Galgóczi Gyula
mérnöktanár

Szödliget, 2008. november 3.